



MINISTERUL
EDUCAȚIEI



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, Județul Dolj, 17 februarie 2024
CLASA a IX-a - Soluții și bareme

Subiectul 1.	
a) Pentru orice număr real x avem $x = [x] + \{x\}$, unde $\{x\} \in [0,1)$ iar $[x] \in \mathbb{Z}$	1p
i) Dacă $\{x\} \in [0, \frac{1}{2})$ atunci $\{x + \frac{1}{2}\} \in [\frac{1}{2}, 1)$ și $[x + \frac{1}{2}] = [x]$, iar $\{2x\} \in [0, 1)$ și $[2x] = 2[x]$. Deci $[x] + [x + \frac{1}{2}] = [2x]$ este echivalentă cu $[x] + [x] = 2[x]$, relație adevărată.....	1p
ii) Dacă $\{x\} \in [\frac{1}{2}, 1)$ atunci $\{x\} + \frac{1}{2} \in [1, \frac{3}{2})$ și $[x + \frac{1}{2}] = [x] + 1$, iar $\{2x\} \in [1, 2)$ și $[2x] = 2[x] + 1$. Deci $[x] + [x + \frac{1}{2}] = [2x]$ este echivalentă cu $[x] + [x] + 1 = 2[x] + 1$, relație adevărată.....	1p
b) $[\frac{2x+1}{3}] + [\frac{4x+5}{6}] = [\frac{2x+1}{3}] + [\frac{2x+1}{3} + \frac{1}{2}] = [2 \cdot \frac{2x+1}{3}]$ și ecuația devine $[\frac{4x+2}{3}] = \frac{x+3}{2}$	1p
Dar $[\frac{4x+2}{3}] \leq \frac{4x+2}{3} < [\frac{4x+2}{3}] + 1$ de unde se obține $\frac{x+3}{2} \leq \frac{4x+2}{3} < \frac{x+3}{2} + 1$ deci $x \in [1, \frac{11}{5})$	2p
Din condiția $\frac{x+3}{2} \in \mathbb{Z}$ și $\frac{x+3}{2} \in [2, \frac{13}{5})$ avem $\frac{x+3}{2} = 2$ deci $x = 1$ este soluție.....	1p
Subiectul 2.	
$(a + b)^n = M_a + b^n$, pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$	1p
$67^{67} = (13 \cdot 5 + 2)^{67} = M_{13} + 2^{67}$. Dar $2^{67} = (2^6)^{11} \cdot 2 = (13 \cdot 5 - 1)^{11} \cdot 2 = M_{13} - 2$, deci $67^{67} = M_{13} - 2$	2p
$83^{83} = (13 \cdot 6 + 5)^{83} = M_{13} + 5^{83}$. Dar $5^{83} = (5^2)^{41} \cdot 5 = (13 \cdot 2 - 1)^{41} \cdot 5 = M_{13} - 5$, deci $83^{83} = M_{13} - 5$	2p
$7^7 = (7^3)^2 \cdot 7 = (13 \cdot 26 + 5)^2 \cdot 7 = (M_{13} + 5)^2 \cdot 7 = (M_{13} + 5^2) \cdot 7 = M_{13} - 7$	1p
Deci $67^{67} + 83^{83} - 7^7 = M_{13} - 2 - 5 + 7 = M_{13}$	1p
Subiectul 3.	
a) $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$, iar $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$	1p
$\overrightarrow{CP} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$, iar $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} + \frac{4}{5}\overrightarrow{BC} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{6}{5}\overrightarrow{AC}$	2p
Deci $\overrightarrow{NP} = 2\overrightarrow{MN}$, de unde obținem că vectorii \overrightarrow{NP} și \overrightarrow{MN} sunt coliniari	1p
b) $MB = \frac{3}{5}AB$, $MT = MA + AT = \frac{2}{5}AB + \frac{1}{5}AB = \frac{3}{5}AB$ deci M este mijlocul segmentului BT	1p
În triunghiul PBT , PM este mediană și $\overrightarrow{PM} = 3\overrightarrow{NM}$, deci N este centrul de greutate al triunghiului PBT , de unde obținem că $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{NT} = \vec{0}$ echivalent cu $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{TN}$	2p



MINISTERUL
EDUCAȚIEI



Subiectul 4.

a) Dacă ΔABC este dreptunghic în A atunci O , mijlocul laturii BC , este centrul cercului circumscris acestuia.....	1p
Deoarece $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2 \cdot \overrightarrow{MO}$, deci $ \overrightarrow{AP} = 2R$, unde R este raza cercului circumscris ΔABC	1p
În concluzie P este situat pe cercul de centru A și rază $2R$	1p
b) $\overrightarrow{MQ} + (x + y) \cdot \overrightarrow{MA} = x \cdot \overrightarrow{MB} + y \cdot \overrightarrow{MC}$ este echivalentă cu $\overrightarrow{MQ} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC}$	1p
Notăm N punctul pentru care $x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AN}$ și O' punctul pentru care $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AN}$. Deoarece $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{OO'}$ atunci $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{QO'}$ deci $QO' = R$	2p
Q este situat pe cercul de centru O' și rază R	1p